MÓDULO TEÓRICO PRÁCTICO

MATEMÁTICA

CICLO SUPERIOR

INSTITUTO FRAY MAMERTO ESQUIÚ

5TO AÑO – ESCUELA SECUNDARIA

CICLO LECTIVO 2018

ALUMNO/A:

CONTENIDOS – OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

CONTENIDOS

Álgebra y Funciones (0)
Polinomios: Factorización – Lema de Gauss y Regla de Ruffini

Álgebra y Funciones (1)
Funciones Polinómicas: Reconocimiento de funciones polinómicas. Gráficos – Análisis. Construcción de gráficos aproximados a partir de la forma polinómica y factorizada.

Álgebra y Funciones (2)
Funciones Racionales (homográficas): Cálculo de dominio de diferentes funciones homográficas en forma analítica. Fórmulas y gráficos. Análisis completo del gráfico de una función racional.

Números y Operaciones (3)
Números Reales: Logaritmos. Conceptos, propiedades. Operaciones. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Álgebra y Funciones (4)
Funciones Exponenciales y Logarítmicas: Concepto. Gráfica y análisis. Simetría entre funciones inversas – Composición.

Geometría y Álgebra (5)
Lugar Geométrico: Circunferencia. Elipse. Hipérbola. Parábola

Probabilidad y Estadística (6)
Estadística: Muestra y población. Medidas de centralización, de posición y de dispersión.

Números y Operaciones (7)
Sucesiones: Sucesiones dada por su término general. Progresiones aritméticas y geométricas.

Geometría y Álgebra (8)
Semejanza: Área y volúmenes de cuerpos. Razón entre áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- ✓ Construir conocimientos matemáticos significativos.
- ✓ Elaborar estrategias de trabajo matemático en el aula en un marco de responsabilidad, solidaridad y convivencia democrática.
- ✓ Trabajar de manera autónoma identificando posibles modelizaciones de situaciones que se presenten en diferentes campos.
- ✓ Distinguir definiciones de explicaciones y ejemplos.
- ✓ Justificar estrategias.
- ✓ Comprobar lo razonable de sus resultados.
- ✓ Valoración del intercambio de ideas como fuente de aprendizaje.
- ✓ Curiosidad, apertura y duda como base del conocimiento.
- ✓ Utilización del lenguaje claro y preciso.

PAUTAS DE TRABAJO

CARPETA

La carpeta será visada por el docente cuando éste la requiera, debiendo estar completa, legible y siempre presente en clases.

PRUEBAS ESCRITAS

Serán avisadas con antelación.
En caso de ausencia:

- De la docente: Se tomará la clase siguiente.
- Del alumno: Deberá justificar la falta por escrito, y el docente pautará con el alumno la nueva fecha a evaluar.

LECCIONES DEL DÍA

El tema de cada clase podrá ser evaluado en la siguiente, en forma oral o escrita, sin necesidad de aviso previo.
Cabe destacar que si un alumno se ausenta a una clase, el mismo se deberá presentar en la siguiente con la teoría copiada y las tareas realizadas. Es responsabilidad del alumno cumplimentar los saberes que no se hayan adquirido por inasistencias, ya que la profesora sólo resolverá dudas puntuales.

TRABAJOS PRÁCTICOS

En cada clase se presentará la tarea propuesta en la anterior. El docente podrá notificar en el cuaderno de comunicaciones cada falta de tarea o cada falta del material de trabajo cuando lo solicite, y esto será utilizado para la nota del trimestre.
La totalidad de los ejercicios propuestos serán corregidos en clase, por lo que se recomienda que cada alumno plantee sus dudas y se haga cargo de la autocorrección en su carpeta.

EVALUACIÓN DEL ALUMNO

Para evaluar el desempeño del alumno en el aula se tendrá en cuenta las calificaciones obtenidas en carpeta, pruebas escritas, trabajos prácticos, parcialitos, pruebas del día, lecciones orales, actividades a resolver en el pizarrón; responsabilidad, solidaridad y convivencia democrática en el aula; correcta utilización de las herramientas matemáticas; construcción de respuestas coherentes a la situación planteada; adquisición de vocabulario específico, tanto coloquial, como simbólico o gráfico, y así también adecuado uso de la notación matemática; estado de situación de cada alumno; trabajo activo y participativo en clase; respeto hacia el docente; responsabilidad y compromiso con el trabajo extra escolar.

MATERIAL DE TRABAJO DIARIO

Es obligación del alumno tener diariamente el material necesario para trabajar en clase: carpeta con hojas, lápiz, lapicera, goma, regla, guías de estudio, calculadora, etc. En caso de necesitarse útiles de geometría, se avisará con antelación.

USO DE LA CALCULADORA

Se aprobará el uso de calculadora científica en todo momento de las clases.

CUADERNO DE COMUNICACIONES

El cuaderno de comunicaciones es la herramienta por la cual se establece relación entre el responsable del alumno y el profesor. Es obligatorio notificarse de los comunicados del docente sobre el desempeño del alumno. Ante cualquier duda, se puede consultar al docente por este medio de comunicación.
De existir la falta del mismo las evaluaciones quedarán en poder de la docente hasta que sea presentado el cuaderno.
En el caso de que alguno de los padres necesite tener una reunión con el docente, se deberá solicitar mediante cuaderno de comunicaciones, detallando su disponibilidad para ser citado.

Profesor Martín Iribarne

Profesora Estefanía Ferrera

FUNCIÓN POLINÓMICA

Se denomina función polinómica a aquella de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Es decir, es aquella cuya expresión general está compuesta por un polinomio. Son ejemplos de funciones polinómicas:

a) $t(x) = -2x^3 - 8x - x^2 - 4$ *en este caso es una función de grado ………….. cuyo coeficiente principal es ……………. y su término independiente es ………………..*

b) $h(x) = x - \frac{13}{12}x^4 - \frac{1}{4}x$ *en este caso es una función de grado …………. cuyo coeficiente principal es ……………. y su término independiente es ………………*

Se trabajará básicamente con dos formas de la función polinómica:

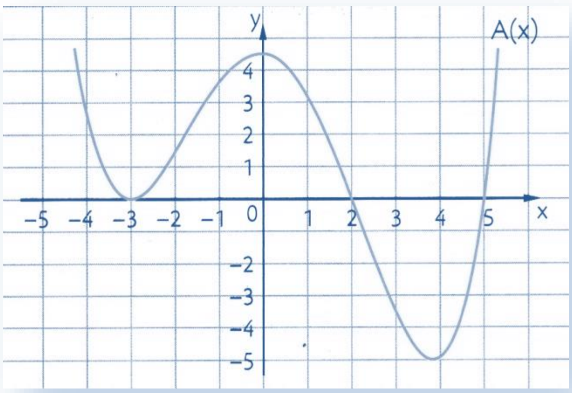
1) ***Forma general:*** como los ejemplos que se acaban de mostrar.

2) ***Forma factorizada:*** que expresa a la función a través de la forma factorizada del polinomio que la compone, por ejemplo.

$$f(x) = 2.(x-3).(x+\frac{1}{2})^2$$

Como ya se ha estudiado en años anteriores, una función lineal es aquella que su expresión general es de grado uno $(f(x) = ax + b)$ y su gráfico es una ……………………..……… En una función cuadrática a su vez, la expresión que forma su ecuación es un polinomio de grado ……… $(f(x) = ax^2 + bx + c)$ y su gráfica es una curva continua llamada …………………………..

Cuando la expresión general de una función sea un polinomio de grado mayor o igual que tres, la llamaremos función polinómica. Sui gráfico es una curva continua que adopta el siguiente aspecto:



Las funciones polinómicas que se graficarán en el transcurso de este tema, se harán en forma aproximada. Esto se debe a que su desarrollo específico excede los contenidos matemáticos estudiados hasta el 5to año de escuela secundaria.

ANÁLISIS GENERAL DE UNA FUNCIÓN POLINÓMICA:

- **Dominio:**

Todo polinomio puede especializarse en cualquier número. Por lo tanto, se puede inferir que el dominio de cualquier función polinómica son todos los números reales. De hecho así lo demuestra su gráfico, el cual no tiene cortes ni interrupciones en ningún punto del dominio.

- **Intersección con los ejes**

Intersección con el eje de abscisas (raíces):

Las raíces de un polinomio son los valores de x que lo anulan; si x es raíz, entonces $P(x) = 0$. Se sabe que la intersección entre el gráfico de una función polinómica y el eje de abscisas se relaciona con las raíces reales del polinomio asociado a ella. La forma de esas intersecciones dependerá del grado de multiplicidad que tengan las raíces. Si el grado de multiplicidad de la raíz de un polinomio es par, al tomar x el valor de la raíz, el gráfico de la función asociada es tangente (rebota) al eje de abscisas. Si el grado de multiplicidad es impar, el gráfico atraviesa al eje de abscisas. Para hallar las raíces de cualquier función polinómica se factoriza el polinomio asociado a ella con el método conveniente para el grado de la función. Y se analiza la multiplicidad de cada una de ellas.

Ejemplo:

Supongamos que queremos hallar las raíces de la siguiente función polinómica:

$f(x) = 2x^4 - 18x^2 + 8x + 24$

como es de grado cuatro y todos sus coeficientes son números enteros, aplicaremos el Lema de Gauss y la Regla de Ruffini para hallar sus raíces:

(p) divisores del término independiente: 24 → $\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm8; \pm12; \pm24$

(q) divisores del coeficiente principal: 2 → $\pm1;\ \pm2$

$\frac{p}{q}$: Posibles Raíces: → $\pm1; \pm\frac{1}{2}; \pm2; \pm3; \pm\frac{3}{2}; \pm4; \pm6; \pm8; \pm12; \pm24$

Regla de Ruffini

¡Nota importante!

Para aplicar la regla de Ruffini hay que completar y ordenar el polinomio.

En este caso falta el término de grado tres, por lo tanto completamos con cero en su lugar.

	2	*0*	*-18*	*8*	*24*
2		*4*	*8*	*-20*	*-24*
	2	*4*	*-10*	*-12*	*0*

$\boxed{x_1 = 2}$

$\mathbf{2x^3 + 4x^2 - 10x - 12}$

	2	4	-10	-12
2		4	16	12
	2	8	6	0

$\boxed{x_2 = 2}$

$\mathbf{2x^2 + 8x + 6}$

$x = 2 \rightarrow 2.2^3 + 4.2^2 - 10.2 - 12 = 0$

$x_3; x_4 = \frac{-8\pm\sqrt{8^2-4.2.6}}{2.2} = \frac{-8\pm\sqrt{64-48}}{4} = \boxed{x_3 = -1}\ \boxed{x_4 = -3}$

Raíces

$\mathbf{x_1} = 2$ dos es raíz doble

$\mathbf{x_2} = 2$

$\mathbf{x_3} = -1$

$\mathbf{x_4} = -3$

$\mathbf{f(x) = 2.(x-2)^2 \,.\, (x+1).\,(x+3)}$ $\longrightarrow$ Forma Factorizada de la función

Recordemos que como $x_1 = 2$ es una raíz doble, el gráfico de la función “rebota” en ese punto y en las demás raíces, al ser simple el gráfico atraviesa el eje x.

Intersección con el eje de ordenadas (ordenada al origen):

El gráfico de una función corta al eje y en el punto en que la variable independiente toma el valor cero. En una función $f(x)$ el punto de intersección con el eje de y es $\big(0\,;f(0)\big)$. En el gráfico de observa donde la curva corta al eje de ordenadas. Para hallar la ordenada al origen de la función polinómica con la que se esté trabajando, basta con reemplazar la variable x por cero y calcular. Luego armar el punto conveniente.

En este caso:

Si f(x)= $2x^4 - 18x^2 + 8x + 24$

$$f(0) = \text{……………………………………………………………………………...}$$

La ordenada al origen se encuentra en el punto (0, ……) que coincide con el ……………………………………….

- **<u>Conjunto de positividad y negatividad de una función:</u>**

El conjunto de positividad de una función polinómica está formado por todos los valores de x donde f(x) es positivo, es decir $f(x) > 0$. Sin embargo, el conjunto de negatividad de una función polinómica está formado por todos los valores de x donde f(x) es negativa, o sea $f(x) < 0$. Para hallar los conjuntos de positividad y negatividad en una función de este tipo, conviene armar intervalos que utilicen como extremos las raíces de la función. Y luego calcular si dicho intervalo es positivo o negativo.

En este caso las raíces halladas indican que la gráfica de la función interseca al eje x en los puntos

$\mathbf{x_1} = 2$ dos es raíz doble

$\mathbf{x_2} = 2$

$\mathbf{x_3} = -1$

$\mathbf{x_4} = -3$

Ubicando estos valores, sobre el eje x quedan determinados tres intervalos en los que se divide el dominio

$$(-\infty,-3) \cup (-3,-1) \cup (-1.2) \cup (2,\infty)$$

Para determinar el conjunto de positividad y de negatividad de la función, tomemos valores representativos en cada uno de estos intervalos y observemos el signo de su imagen.

En el intervalo 1 tomemos x= -5 y hagamos f(-5)= ………………………………………………………….= el resultado dio con signo ……………………… Por lo tanto el valor x= -5 pertenece al conjunto de ……………………….. de la función. Hagamos lo mismo en los demás intervalos:

En el segundo intervalo tomemos el valor $x =$ ………………… y especialicémoslo en la función:

El valor de $x =$ ………. Pertenece al conjunto de ………………………….. de la función.

Repitamos el procedimiento para los demás intervalos:

- **<u>Gráfico:</u>**

Teniendo en cuenta todos los datos hallados hasta el momento, hagamos un gráfico aproximado de la función:

Recordemos:

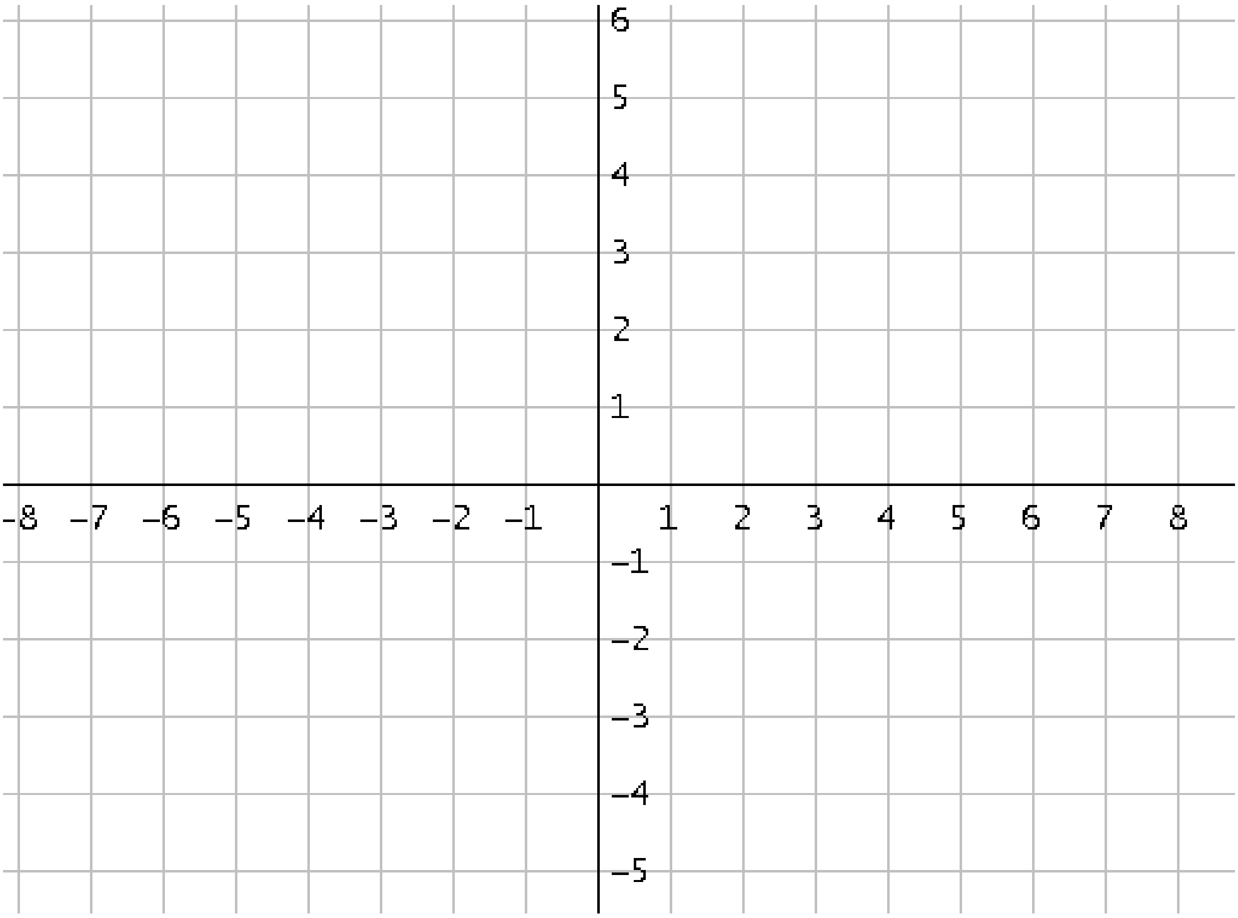
Las raíces de la función son: …………………………………………………………………………………………………

La ordenada al origen de la función es: ………………………………………………………………………………

El conjunto de positividad es: ………………………………………………………………………………………………

El conjunto de negatividad es: ………………………………………………………………………………………………

El gráfico aproximado es:



FUNCIÓN POLINÓMICA- PRÁCTICA

1) Observar el gráfico que corresponde a una función polinómica de grado 3 y responder:

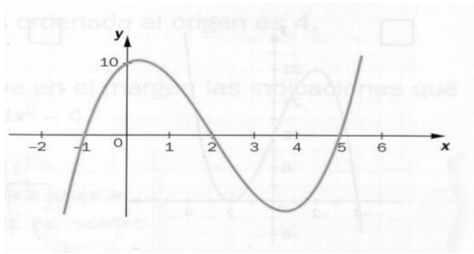
   a) ¿Puede ser f(10)<0? ¿y f(-5)>0? ¿Por qué?
   b) Completar:

      Raíces: ……………………………………………

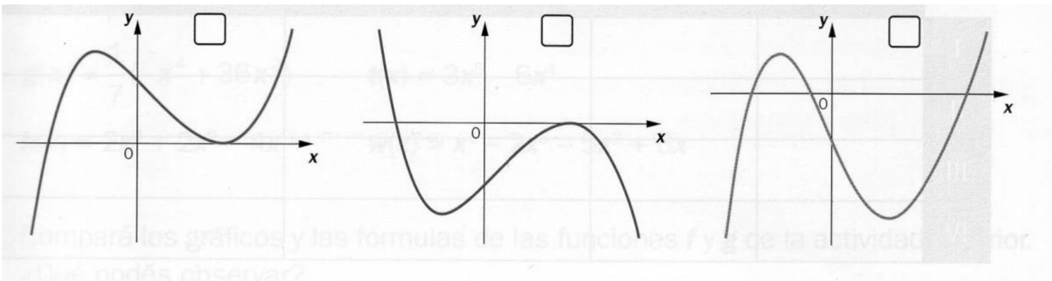
      Ordenada al origen: ……………...……

      Conjuntos de positividad: ………………………………………

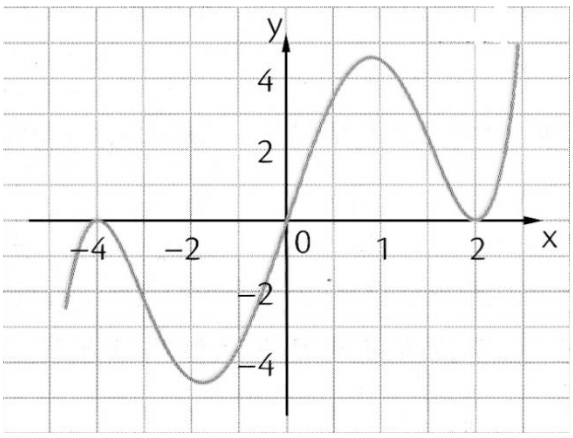
      Conjuntos de negatividad: ……………………………………..



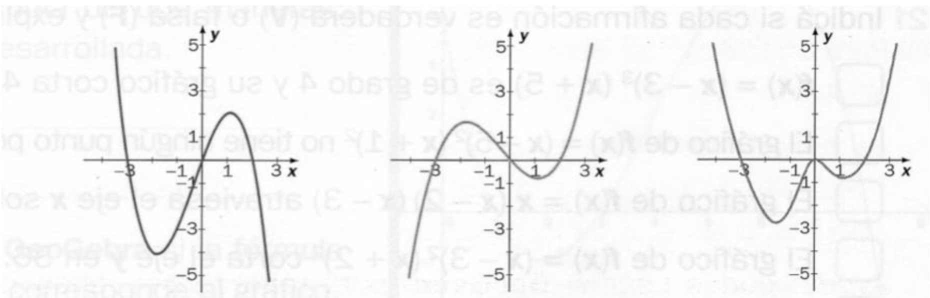
2) Observar los gráficos, todos ellos corresponden a funciones polinómicas de grado 3, pero uno tiene ordenada al origen positiva. Marcar con una cruz el gráfico que coincide con la descripción anterior y explicar por qué fueron descartadas las otras opciones:



3) Observar el gráfico e indicar el grado de multiplicidad mínimo de las raíces de la función.



4) Uno de estos gráficos corresponde a la función $f(x) = 0{,}2\, x(x-2)(x+3)$, indicar cuál es justificando la elección:

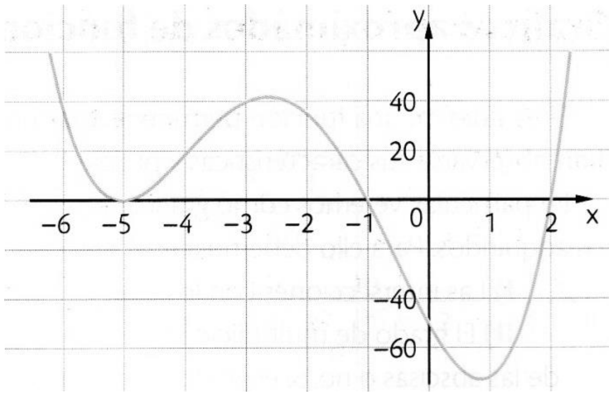


5) A partir del gráfico, indicar:

a) Grado mínimo del polinomio.

b) Raíces y ordenada al origen.

c) Conjunto de positividad y negatividad.



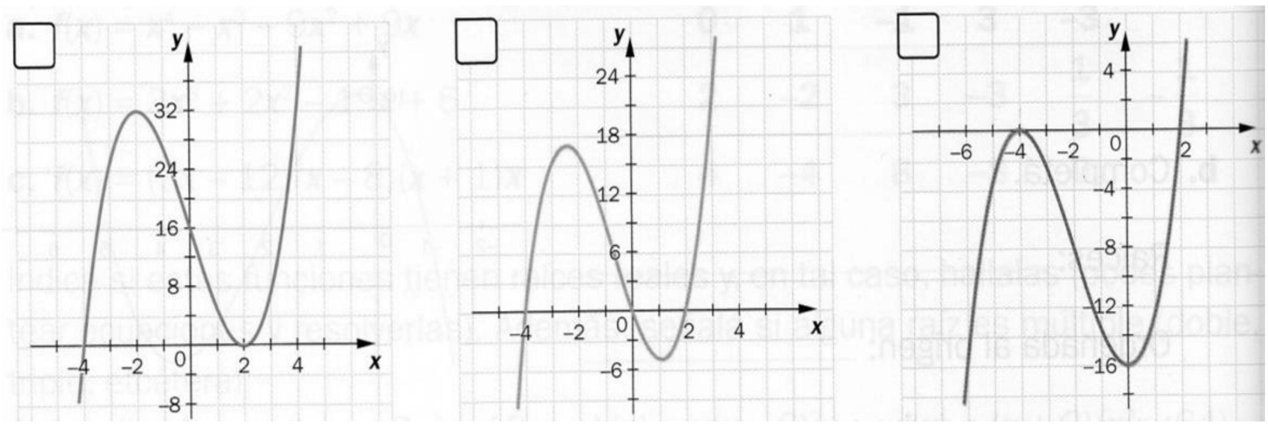
6) Se graficaron tres de estas cuatro funciones, indicar qué fórmula corresponde a cada gráfico.

a) $f(x) = 0{,}5.(x+4)^2(x-2)$

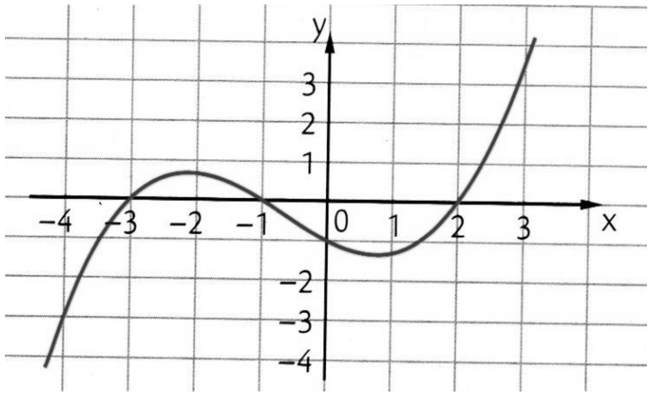
b) $f(x) = x(x+4)(x-2)$

c) $f(x) = (x+4).(x-2)$

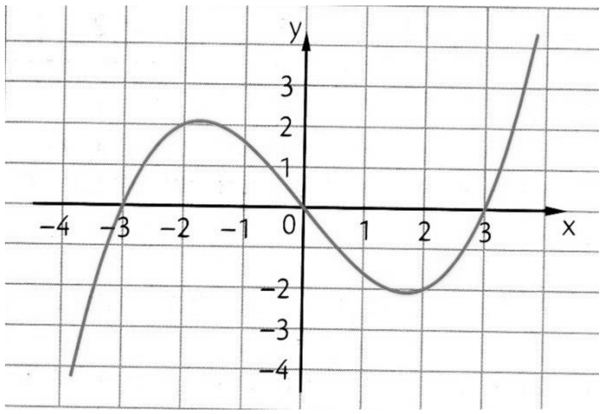
d) $f(x) = (x-2)^2 .\ (x+4)$



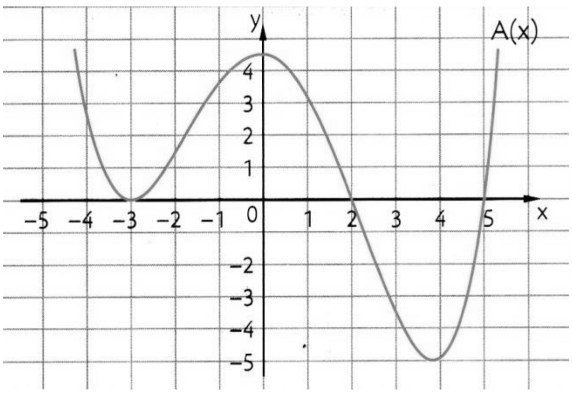
7) El gráfico representa una función polinómica de grado 3, hallar su coeficiente principal y expresarla en forma polinómica.

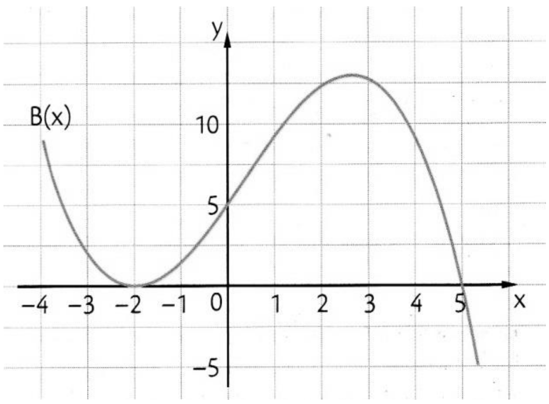


8) En la función del gráfico, el coeficiente principal es $\frac{1}{5}$ y su grado es 3. Encontrar las expresiones polinómica y factorizada de la función.

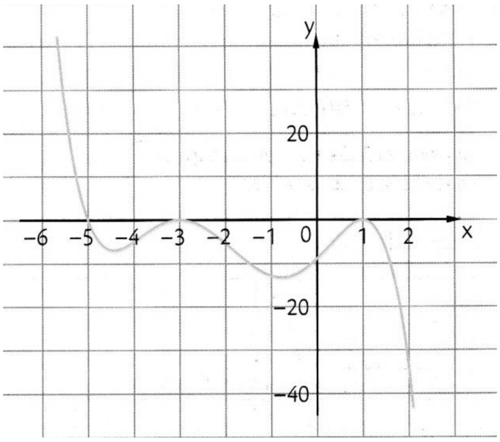


9) Observar los gráficos de la funciones y determinar para cada una de ellas:
   a) El grado mínimo que puede tener la función.
   b) La multiplicidad de sus raíces.
   c) Los conjuntos de positividad y negatividad.





10) La función polinómica representada es de grado 5. Con los datos de gráfico y sabiendo que su coeficiente principal es de $-0{,}2$, escribir la expresión factorizada.



11) Escribir la expresión de una función polinómica que verifique las condiciones pedidas en cada caso:

a) Función de grado 4, x_1=3 es una raíz doble, x_2= - 2 es una raíz doble y f(-1)=2
b) Función de grado 3, x_1= - 5 es una raíz simple, x_2= - 1 es una raíz doble y f(0)=4
c) Función de grado 4, $x_1 = -\frac{1}{3}$ es una raíz doble, x_2= 3 es una raíz simple y su coeficiente principal es $\frac{2}{3}$ y f(2)=0

12) Si una función polinómica de grado 3 tiene tres raíces reales, su coeficiente principal es 3 y se conoce que $f(4) = 0, f(-2) = 0$ y $f(3) = 10$ ¿Cuál es el valor de la raíz que falta?

13) Si una función polinómica de grado 3 tiene tres raíces reales, su coeficiente principal es -6 y se conoce que $g\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ y $g(1) = 9$, ¿cuál es el valor de la raíz que falta?

14) $h(x)$ es una función polinómica de grado 5, $h(0) = -1$; tiene raíces dobles en $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$ y una raíz simple en $x_3 = 3$. Hallar la forma factorizada de $h(x)$.

15) Graficar las siguientes funciones polinómicas. De cada una de ellas indicar: raíces y ordenada al origen, multiplicidad de las raíces y conjuntos de positividad y negatividad.

a) $a(x) = x^3 - x - 2 + 2x^2$
b) $b(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$
c) $f(x) = x^5 + 8x^4 - 3x^3 - 24x^2$
d) $j(x) = (x+1)^3(x-1)^2(x+3)$

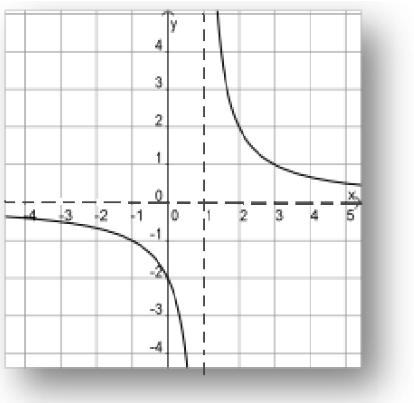
FUNCIÓN HOMOGRÁFICA

Se denomina función homográfica a toda función de la forma

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Con la condición *a, b,* c y d sean números reales, que $c \neq 0$ y que $a \, . \, d \neq b \, . \, c$

Su gráfica es una curva discontinua llamada hipérbola que adopta el siguiente aspecto:



- **Dominio**

Esta función, al estar escrita como una fracción, tiene ciertas limitaciones a la hora de tomar valores y especializarlos en la misma. El problema radica en que no puede tomarse ningún valor que anule al denominador, por lo tanto el único número real que no pertenece al dominio es la raíz del denominador (ya que no se puede dividir por 0).

El dominio de una función homográfica se escribe de la siguiente manera

$$\boldsymbol{Dom\ f = R - \{raíz\ del\ denominador\}}$$

Veamos un ejemplo:

Para la función $f(x) = \frac{6x+18}{-3x+6}$, busquemos la raíz del denominador igualando dicha expresión a cero:

$$-3\text{x} + 6 = 0$$

Y despejemos x: ……………………………….......

………………………………….

…………………………………

Luego:

$$\boldsymbol{Dom\ f = R - \{\dots\ \dots\ \dots..\}}$$

Raíz

Para hallar la raíz de una función se la iguala a 0. Pero para que una división de este tipo sea 0, debe ser 0 el numerador.

En el ejemplo anterior:

Busquemos la raíz de la función $f(x) = \frac{6x+18}{-3x+6}$, para ello debemos igualarla a cero y despejar x.

$$\frac{6x + 18}{-3x + 6} = 0$$

……………………………………… = ……………………………………

……………………………………… = ……………………………………

……………………………………… = ……………………………………

……………………………………… = ……………………………………

Luego la raíz de la función está en el valor $\boldsymbol{x} =$ **……………..**

Ordenada al origen

La intersección de la función con el eje de ordenadas se determina calculando $f(0)$.

En el ejemplo que venimos siguiendo:

$f(0) = \frac{6.0+18}{-3.0+6} =$……………… = ……..

La ordenada al origen está en el punto **(………. ; ………)**

Asíntotas

Como se dijo al principio, la gráfica de una función homográfica no es una curva continua, esos cortes se deben a que el dominio no son todos los números reales. Estos cortes se evidencian en el gráfico en forma de asíntotas. Las asíntotas son rectas a las que las graficas de la función se acerca indefinidamente, sin tocarla. En este tipo de funciones existen dos asíntotas: una horizontal y otra vertical.

¿Cómo determinamos la asíntota vertical?

Cuando calculamos el dominio de la función, descubrimos que hay un valor que no puede ser considerado en él. En ese valor, entonces, se encontrará la asíntota vertical de la función homográfica en cuestión.

Entonces la **A.V.:** $\boldsymbol{x} =$ **……………….**

¿Cómo determinamos la asíntota horizontal?

Observemos los coeficientes principales de las expresiones del numerador y denominador de la función

$$f(\mathrm{x}) = \frac{6\mathrm{x} + 18}{-3\mathrm{x} + 6}$$

Ellos son $a =$ ………… y $c =$ ……………

Del cociente entre ambos se obtiene la asíntota horizontal.

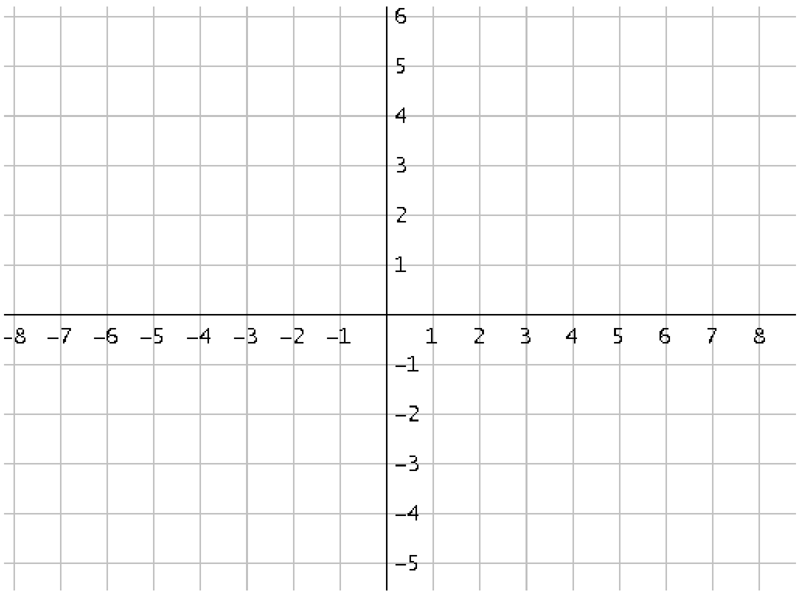
En este caso es: **A.H.: y= ………………..**

- **<u>Imagen</u>**

Una vez determinada la A.H, podemos decir que la imagen de la función es:

$$\boldsymbol{Im\, f = R} - \{\dots\dots\dots..\}$$

- **<u>Gráfico</u>**



FUNCIÓN HOMOGRÁFICA- PRÁCTICA

1) Indicar el dominio, la imagen, las ecuaciones de las asíntotas (vertical y horizontal) y los puntos de intersección con los ejes coordenados de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{1}{2-x}$

b) $f(x) = \frac{2x}{4-x}$

c) $f(x) = \frac{x-3}{2+x}$

d) $f(x) = \frac{6-3x}{x-5}$

e) $f(x) = \frac{10-3x}{2-2x}$

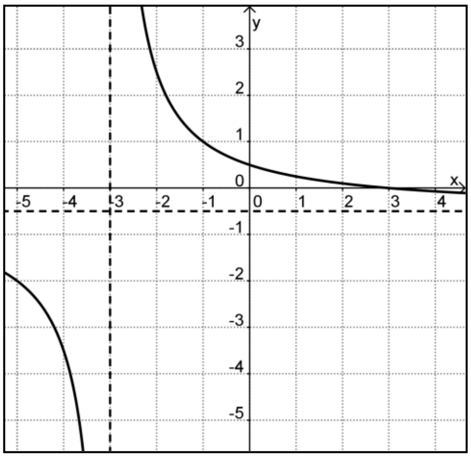
f) $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$

g) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$

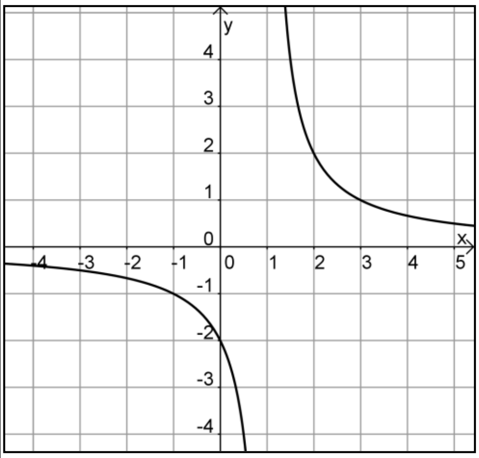
h) $f(x) = \frac{x+3}{2-x} - 2$

2) Para cada uno de los siguientes gráficos, indicar el dominio, la imagen, las raíces y ordenada, los conjuntos de positividad y negatividad, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, las ecuaciones de las rectas asíntotas.

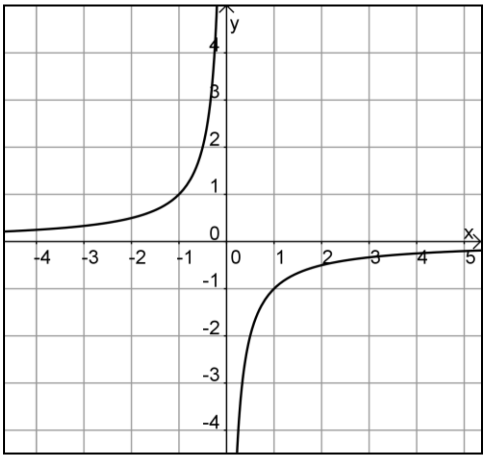
DOMINIO	
IMAGEN	
ORDENADA AL ORIGEN	
C0	
C+	
C-	
CRECE O DECRECE	
AV	
AH	



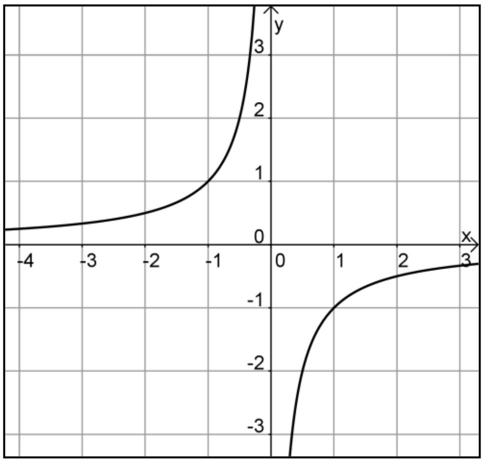
DOMINIO	
IMAGEN	
ORDENADA AL ORIGEN	
C0	
C+	
C-	
CRECE O DECRECE	
AV	
AH	



DOMINIO	
IMAGEN	
ORDENADA AL ORIGEN	
C0	
C+	
C-	
CRECE O DECRECE	
AV	
AH	



DOMINIO	
IMAGEN	
ORDENADA AL ORIGEN	
C0	
C+	
C-	
CRECE O DECRECE	
AV	
AH	



3) Sea la función $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

a) Indicar el conjunto dominio y el conjunto imagen. Justificar.
b) Indicar la intersección con los ejes.
c) Determinar las asíntotas vertical y horizontal.
d) Realizar el gráfico de la función.
e) Determinar el intervalo de crecimiento y decrecimiento.

4) Construir la ecuación de una función que cumpla las siguientes condiciones:

a) Cuyo dominio sea $R - \{4\}$
b) Cuyo dominio sea $R - \{3\}$ y corte al eje x en -2
c) Corte al eje x en -5 y al eje y en 6
d) Cuyo dominio sea $R - \{-7\}$ y su raíz esté en $x = -\frac{1}{5}$
e) Atraviese al eje x en el valor 0 y una asíntota este en y = -3
f) Tenga asíntota x=2 y en y = - 5
g) Su dominio sea $R - \{-3\}$ y tenga una asíntota de ecuación y = 3
h) Dominio $R - \{1\}$ y una asíntota de ecuación y = 1
i) El dominio sea $R - \{0\}$ y tenga una asíntota en y = 3
j) Dominio igual a $R - \{4\}$ y asíntota en y = 0

5) Graficar las siguientes funciones homográficas. Luego, de cada una de ellas indicar: dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, ecuaciones de sus asíntotas.

a) $f(x) = \frac{2x}{4-x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$

c) $f(x) = 2 - \frac{1+x}{2-x}$

NÚMEROS REALES. LOGARITMOS

Actividad: Buscar los exponentes necesarios para que se cumplan las siguientes igualdades.

1) $2^{\cdots\cdots} = 8$
2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\cdots\cdots} = 64$
3) $9^{\cdots\cdots} = 3$
4) $7^{\cdots\cdots} = 10$
5) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\cdots\cdots} = 1$
6) $0{,}3^{\cdots\cdots} = 0{,}3$

En lenguaje matemático, el exponente buscado se denomina **logaritmo**, y la notación usual correspondiente es:

$$\log_a b = c \quad \rightarrow \quad a^c = b$$

(se lee: *logaritmo en base* ***a*** *de* ***b*** *es* ***c****, pues* ***a*** *elevado a la* ***c*** *da como resultado* ***b***)

donde ***a*** se denomina **base** y debe ser un número real positivo distinto de 1
b se denomina **argumento** y debe ser un número real positivo
y ***c*** es el resultado o **logaritmo** que responde a un número real

Teniendo en cuenta los ejemplos vistos en la actividad, se pueden escribir como logaritmos de la siguiente manera:

$\log_2 8 =$………. → ……………………………………………..

$\log_{\frac{1}{4}} 64 =$ ……… → ……………………………………………

$\log_9 3 =$ ……… → ……………………………………………

$\log_7 10 =$ ……… → ……………………………………………

$\log_{\frac{1}{10}} 1 =$ ……… → ……………………………………………

$\log_{0,3} 0{,}3 =$ ……… → ……………………………………………

$\log_6 -6 =$ ……… → ……………………………………………

Nota: En el caso que el logaritmo no sea un número racional, se denota como la expresión del logaritmo sin resolver. Como por ejemplo, $\log_7 10$ queda así expresado y es un número real.

Propiedades de los logaritmos

ENUNCIADO	EXPRESIÓN SIMBÓLICA	EJEMPLO NUMÉRICO
El logaritmo en cualquier base de 1 es siempre 0	$\log_a 1 = 0$	$\log_6 1 = 0$
El logaritmo en cualquier base de un número igual a ella es siempre 1	$\log_a a = 1$	$\log_4 4 = 1$
El logaritmo en cualquier base de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores	$\log_a(b\ .\ c) = \log_a b + \log_a c$	$\log_2(32\ .\ 8) = \log_2 32 + \log_2 8 =$ $5 + 3 = 8$
El logaritmo de un cociente es igual a la resta entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor respectivamente	$\log_a(b : c) = \log_a b - \log_a c$	$\log_5\left(\frac{125}{25}\right) = \log_5 125 - \log_5 25 =$ $3 - 2 = 1$
El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base	$\log_a b^c = c\ .\ \log_a b$	$\log_7 49^2 = 2\ .\ \log_7 49 = 2\ .\ 2 = 4$

Logaritmos decimales y logaritmos naturales

Cuando la base de un logaritmo es 10, dicho logaritmo se llama **decimal**; en ellos no es necesario indicar la base, es decir que: $\mathbf{\log a} = \log_{10} a$

Otros logaritmos que se utilizan con mucha frecuencia son los logaritmos **naturales** (se los escribe ***ln***). Estos logaritmos tienen como base a un número especial: el número *e.*

El número *e*

La constante matemática ***e*** es uno de los más importantes números reales. Se relaciona con muchos interesantes resultados.

El número ***e***, conocido a veces como número de Euler o constante de Napier, fue reconocido y utilizado por primera vez por el matemático escocés John Napier, quien introdujo el concepto de *logaritmo* en el cálculo matemático.

Está considerado el número por excelencia del cálculo, así como π lo es de la geometría. Describe el comportamiento de acontecimientos físicos regidos por leyes sencillas, como pueden ser la velocidad de vaciado de un depósito de agua, el giro de una veleta frente a una ráfaga de viento, el movimiento del sistema de amortiguación de un automóvil o el cimbreo de un edificio metálico en caso de terremoto. De la misma manera, aparece en muchos otros campos de la ciencia y la técnica, describiendo fenómenos eléctricos y electrónicos, biológicos, químicos, y muchos más.

El número ***e***, al igual que el número π, es un número trascendente, es decir, que no puede ser obtenido mediante la resolución de una ecuación algebraica con coeficientes racionales. Además, es un irracional, no expresable por la razón de dos enteros; o bien, no puede ser expresado con un número finito de cifras decimales o con decimales periódicos.

Su valor aproximado por truncamiento es:

$e \approx$ 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995...

En símbolos:

$$\mathbf{ln}\, \boldsymbol{a} = \log_e a$$

Con la calculadora científica se pueden obtener logaritmos decimales pulsando la tecla ***log*** y logaritmos naturales pulsando la techa ***ln***.

Cambio de base

Se quiere averiguar el $\mathbf{log_3 243}$ utilizando la calculadora científica.

Se puede proceder así: según la definición de logaritmo, $\mathbf{log_3 243} = \boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{3^{\boldsymbol{x}}} = \mathbf{243}$

Se aplica logaritmos decimales a ambos miembros de la igualdad ⟶ $\log 3^x = \log 243$

Se aplica la propiedad de la potencia de los logaritmos ⟶ x . ……………… = ……………………

Se despeja $x =$ ____________ , pero se había dicho que $x = \log_3 243$, entonces $x = \log_3 243 =$__________ = ……..

Este procedimiento se denomina *cambio de base*, y permite cambiar la base a de un logaritmo por otra más conveniente (se ha elegido base 10 pero se podía haber elegido cualquier otra).

Si se llama w a la base elegida, se puede aplicar directamente la siguiente fórmula:

$$\boxed{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = \frac{\mathbf{log}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{b}}{\mathbf{log}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{a}}}$$

Propiedades de la potenciación

Producto de potencias de igual base ⟶ $a^n \,.\, a^m = a^{n+m}$

Cociente de potencias de igual base ⟶ $a^n : a^m = a^{m-n}$

Potencia de potencia ⟶ $(a^n)^m = a^{n\,.\,m}$

Potencia de exponente negativo ⟶ $a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m}$

Potencia de exponente racional ⟶ $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita aparece en un exponente o en más de uno.

Para resolverlas, se debe tener presente que:

- Siempre que sea posible, es conveniente expresar ambos miembros de la ecuación como potencias de la misma base.
- Para despejar incógnitas que aparecen en el exponente, es posible usar logaritmos.

__Actividad__: Observar detenidamente las siguientes ecuaciones y completarlas.

1

Se tiene la ecuación	$2^{x+3} = 32$
Se expresa 32 como una potencia de base 2	$2^{x+3} =$ ....
Como las bases ya son iguales, sólo se igualan los exponentes	.... = ...
Se despeja x	.................= ....
	.................= ....
	$S = \{\dots\dots\dots\dots\}$

2

Se tiene la ecuación	$9^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$
Se expresa 9 y $\frac{1}{3}$ como potencias de base 3	.... = ...
Se aplica la propiedad de potencia de potencia	.... = ...
Se igualan los exponentes	.................= ....
Se despeja x	.................= ....
	.................= ....
	$S = \{\dots\dots\dots\dots\}$

3

Se tiene la ecuación $\sqrt{5}\,.\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} = 25^{3x}$

Se expresa $\sqrt{5}, \frac{1}{5}$ y 25 como potencias de base 5 ……………………… = ………………

Se aplica la propiedad de potencia de potencia ……………… = …………………

Se aplica propiedad de producto de potencias de igual base ………………= …………………

Se igualan los exponentes ………………= …………………

Se despeja x ………………= …………………

………………= …………………

………………= …………………

$S = \{\dots\,\dots\,\dots\,\dots\}$

4

Se tiene la ecuación $2^{x+1} - 2^{x-3} + 2^{x} = 23$

Se aplica producto y cociente de potencias de igual base en sentido inverso ………………………………………… = 23

Se extrae 2^x como factor común

2^x . (………………………………) = 23

Se despeja 2^x 2^x = ………………………………

2^x = ……….

Se despeja x ………………= …………………

………………= …………………

$S = \{\dots\,\dots\,\dots\,\dots\}$

5

Se tiene la ecuación $2^x = 5$

Se aplica logaritmo decimal a ambos miembros de la igualdad $\log(\dots\dots\dots\dots) = \log(\dots\dots\dots..)$

Se aplica propiedad de logaritmo de una potencia $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \log(\dots\dots\dots..)$

Se despeja x

$x =$ ______________

Se aplica cambio de base $x = \dots\dots\dots$

$$S = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$$

6

Se tiene la ecuación $3^{2x} + 2\,.\,3^{x+1} = 7$

Se aplica propiedad de potencia de potencia y producto de potencias de igual base en sentido inverso $(\mathbf{3^x})^2 + 2\,.\,\mathbf{3^x}\,.\,3^1 = 7$

Agrupamos los factores del segundo término $(\mathbf{3^x})^2 + 6\,.\,\mathbf{3^x} = 7$

Se sustituye 3^x por $\boldsymbol{z}$ $z^2 + 6z = 7$

La ecuación ahora se convirtió en una ecuación cuadrática y se la debe igualar a cero $z^2 + 6x - 7 = 0$

Se aplica *fórmula resolvente*

$$z = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\,.\,1\,.\,(-7)}}{2\,.\,1}$$

Se obtienen dos valores de z $z_1 = 1$ $z_2 = -7$

Se vuelve a reemplazar z por 3^x y se despejan dos ecuaciones nuevas $3^x = 1$ $3^x = -7$

$x = 0$ $\quad$ *no existe* x

$$S = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$$

Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas que generalmente tienen la incógnita en el argumento de algún logaritmo.

Para resolverlas se tendrá presente que:

- Para despejar una incógnita contenida en el argumento, se aplica la definición de logaritmos
- Siempre que sea posible, conviene agrupar los logaritmos en uno solo, para lo cual se aplican propiedades
- Sólo existen logaritmos de números positivos, por lo cual deben descartarse como soluciones los valores que no verifiquen la ecuación original.

Actividad: Observar detenidamente las siguientes ecuaciones y completarlas.

1

Se tiene la ecuación $\log_2(x+1) = 3$

Se aplica la definición de logaritmos $2^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Se despeja x $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$S = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

2

Se tiene la ecuación $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$

Se aplica la propiedad del producto de logaritmos $\log_2[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] = 1$

Se aplica la definición de logaritmo $\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Se resuelve la ecuación resultante $\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$

$x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$S = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

3

Se tiene la ecuación $\log(2x+1) = \log(x+2)$

Los logaritmos de igual base sólo pueden ser iguales si sus argumentos son iguales ……………………….= ……………………….

Se despeja x ……………………….= ……………………….

$x =$ …………

$S = \{\dots\dots\dots\dots\}$

4

Se tiene la ecuación $2\,.\ \log_5 x + \log_5(8x) = 3$

Se aplica la propiedad de la potencia de logaritmos ……………………….$+ \log_5(8x) = 3$

Se aplica la propiedad del producto de logaritmos ………………………………………….$= 3$

Se aplica la definición de logaritmos …………. = …………………………………….

Se opera convenientemente …………. = …………………………………….

Se despeja x $x =$ ……………………….

$x =$ ……………………….

$S = \{\dots\dots\dots\dots\}$

5

El 5to caso de ecuaciones logarítmicas que se tendrá en cuenta es similar al caso de cambio de variable de que trabajó para ecuaciones exponenciales.

Se considerará $z = \log_a x$ sea cualquiera la base del logaritmo.

NÚMEROS REALES. LOGARITMOS - PRÁCTICA

1) Calcular utilizando la definición.

a) $\log_a a$

b) $\log_2 \frac{1}{2}$

c) $\log_a 1$

d) $\log 100$

e) $\log 0{,}1$

f) $\log_{\frac{1}{5}} 5$

g) $\log_{\frac{1}{5}} 125$

h) $\log_3 3$

i) $\log_5 125$

j) $\log_6 \frac{1}{36}$

k) $\log_2 256$

l) $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)$

m) $\log_{\sqrt{2}} 2$

n) $\log_2 \left(\frac{1}{8}\right)$

o) $\log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{8}\right)$

p) $\log_{\sqrt{2}} 4$

q) $\log_2 0$

r) $\log_9 3$

s) $\log_{\sqrt{3}} 9$

t) $\log_{27} 3$

2) Utilizando las propiedades de los logaritmos, escribir una expresión equivalente.

a) $\log(2^3 \,.\, 8^2)$

b) $\log\left(\frac{3^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{5^4}\right)$

c) $\log\left[(3 \,.\, \sqrt{2})^{\left(\frac{3}{5}\right)}\right]$

d) $\log \sqrt[5]{2^6 \,.\, 5^{(-2)} \,.\, 3}$

e) $\log_{\frac{1}{2}}\left[8 \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

f) $\log_2 \sqrt[5]{\frac{a^3 b^2 c^4}{d\, e^2}}$

3) Utilizar propiedades de logaritmos para reducir estas expresiones y resolver:

a) $\log_a \frac{1}{a} + \log_b b^2 =$

b) $\log(3x+6) - \log 3 - \log(2+x) =$

c) $-\log_2 16^2 \,.\, \log_5 \sqrt[3]{125} =$

d) $-\log_{\sqrt{2}}\left[\left(2^{\frac{3}{4}}\right) : \left(\sqrt{2}\right)^6\right] =$

4) Si $\log_b a = 2\ con\ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}\ y\ a\mathbb{R}^+$, entonces calcula aplicando propiedades:

a) $\log_b \sqrt{a^3 : b} =$

b) $\log_b (b^3 . a)^2 =$

5) Sabiendo que $\log a = 2, \log b = 3\ y\ \log c = 4$. Calcular aplicando propiedades los siguientes logaritmos:

a) $\log(a . b^2) =$

b) $\log\left(\frac{b^3}{\sqrt{a}} . c\right) =$

c) $\log\sqrt{\frac{b}{c^2}} =$

6) Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales y especificar el conjunto solución de las mismas.

a) $3^{x-1} = \frac{1}{27}$

b) $2^{x+1} - 4^{x+1} = 0$

c) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

d) $5^{x+1} + 5^x = 750$

e) $9^x - 2 \,.\, 3^{x+2} + 81 = 0$

f) $3^{2x-1} = 1$

g) $2^{1-x^2} = 0{,}125$

h) $2^{3x} \,.\, 4^x = 8^{x-2} : 16$

i) $2 \,.\, 3^x + 5 \,.\, 3^x - 3^x = 6$

j) $2^{x^2-1} = 256$

k) $10^{2x-1} = 1000^{x+1}$

l) $9^{x^2-5x+9} = 729$

m) $3^{x^2} : 9 = 3^{2+3x}$

n) $4^{2x} - 3 \,.\, 4^x + 2 = 0$

o) $3 \,.\, 5^{x-2} - 4 \,.\, 5^{x-3} + 5^x = 136$

p) $4 \,.\, 3^{x-2} - 2 \,.\, 3^{x+1} + 3^x = -41$

q) $27^x = 9^{2x-1} : 3^x$

r) $2 \,.\, 3^{1-2x} - 8 \,.\, 3^{-x} = -2$

7) Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas y especificar el conjunto solución de las mismas.

a) $3 \,.\ln x - 2 \,.\ln x = \ln 6$

b) $\log\left(\frac{9}{2} - x\right) = \log\frac{9}{2} - \log x$

c) $\log\sqrt{2x-3} + \log\sqrt{x-5} + 1 = \log 30$

d) $\log_5(x-27) - \log_5 8 = 3 - \log_5(3x-11)$

e) $\log_{x^2}(x+2) = 1$

f) $\log_{x+1} 25 = \log_3 9$

g) $\log_{\frac{1}{x}}(3x-4) = -1$

h) $\log\left(2^{2-x}\right)^{2+x} + \log 1250 = 4$

i) $\log_3 x^2 + \log_3 x = 6$

j) $\log_9(x+1) + \log_9 9(x+1) = 2$

k) $(\log_5 x)^2 - 2\log_5 x = 8$

l) $\log_x 36 + \log_x 6 = 1$

m) $(\log x)^2 = 2 - \log x$

n) $\log_5 5x + \log_5 x = 3$

o) $\log_2 x - \log_2(x-2) = 4$

p) $\log(x-8) + \log(x-2) = \log(8-x)$

q) $\log_2(x+1) + \log_2(x-3) = \log_2 5$

r) $\frac{\log(9+x^2)}{\log(4x+3)} = 2$

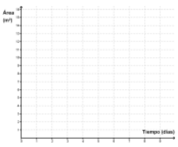
Función exponencial

Resuelve…..

Una fuga de combustible de un barco provocó una mancha de petróleo en la superficie del mar. Esta mancha se expande, con el correr de los días, de tal manera que duplica su área diariamente.

a. Completar la tabla que muestra el área de la mancha para los primeros 7 días, considerando que se comenzó a observar cuando su área era de 1m^2. Luego graficar

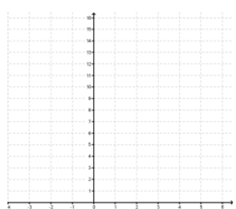
Tiempo	***Cantidad de bacterias***
0	
1	
2	
3	
4	



b. Plantear una fórmula que permita obtener el área de la mancha en función del tiempo y usarla para calcular la que ocupará el día 12.

A diferencia de la situación anterior, en la que la variable independiente no toma valores negativos (no tendría sentido hablar de "área negativa"), para la función $f(x) = 2^x$ se consideran todos los valores reales. Completar la tabla y representar gráficamente.

x	**y**
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



a. ¿La función tiene ceros? ¿por qué?

b. ¿qué ocurre con las imágenes de f cuando x toma valores negativos cada vez más grades en valor absoluto?

c. ¿Cuál es la imagen de f?

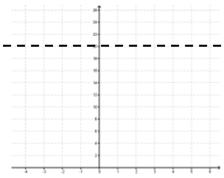
Las funciones de la forma $f(x) = a^x$ son las que denominamos ***exponenciales*** porque **x** aparece en el exponente. Hay que tener en cuenta que **a** es la base de la función; además **a** es un número real positivo y distinto de cero ($a > o\ y\ a \neq 1$). El dominio de estas funciones siempre son los $\mathbb{R}$.

Representar $f(x) = 3^x; g(x) = 5^x; h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x\ y\ t(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ en el mismo sistema coordenado.

Comparar los gráficos obtenidos e indicar si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas, y explicar por qué.

a. Todas las funciones tienen la misma ordenada al origen.

b. Todas las funciones tienen la misma raíz.



c. Todas las funciones tiene una asíntota horizontal.

d. Todas las funciones son crecientes y positivas (sus imágenes)

e. Si las bases de dos funciones exponenciales son inversas $\left(a\ y\ \frac{1}{a}\right)$, entonces sus gráficos son simétricos con respecto al eje **y.**

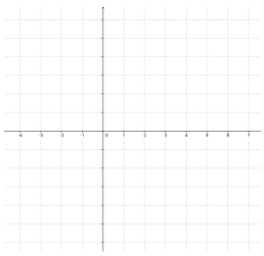
f. Si las bases de dos funciones exponenciales son inversas $\left(a\ y\ \frac{1}{a}\right)$, entonces sus gráficos son simétricos con respecto al eje **x.**

Si $a > 1$, la función es creciente; si $0 < a < 1$ la función es decreciente. Además, si las bases de dos funciones de la forma $f(x) = a^x$ son inversas sus gráficos son simétricos respecto del eje **y**.

Las funciones de esta forma tienen siempre asíntota horizontal en $y = o$, con lo que quedaría delimitado el conjunto imagen

Graficar las distintas funciones del tipo $f(x) = k.a^x$ en el mismo sistema sistema de ejes cartesianos. Luego completar el cuadro.

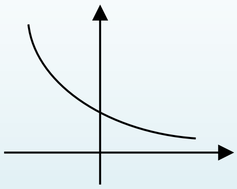
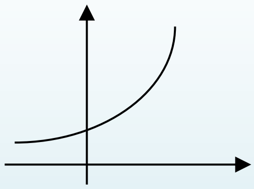
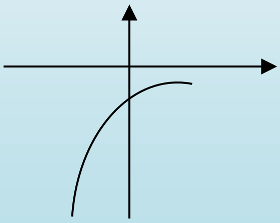
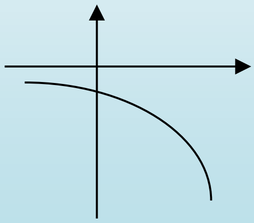
$$f(x) = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x, g(x) = 3.2^x; h(x) = -3.\left(\frac{1}{2}\right)^x; t(x) = -3.2^x$$



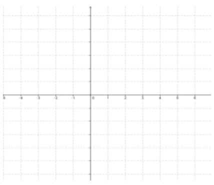
	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{g(x)}$	$\boldsymbol{h(x)}$	$\boldsymbol{t(x)}$
Conjunto imagen				
Ordenada al origen				
¿Crece o decrece?				

Observando las gráficas anteriores y el cuadro ¿Qué podrías concluir cuándo varía k y a?

Las funciones de la forma $f(x) = k.a^x$, donde $k \neq 0$, tienen su ordenada al origen en $(0; k)$. Si tienen la misma base y coeficientes opuestos, las funciones son simétricas con respecto al eje **x.**

	$0 < a < 1$	$a > 1$
$k > 0$	 Decreciente	 Creciente
$k < 0$	 Creciente	 Decreciente

Completa el siguiente cuadro y graficar en un mismo sistema de ejes coordenados



	Conjunto imagen	**Asíntota**	**Ordenada al origen**
$\boldsymbol{f(x) = 2.3^x + 1}$			
$\mathbf{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2.3^x - 1}$			
$\boldsymbol{h(x) = 2.3^x}$			

¿Qué diferencias se observan entre el gráfico $h(x)$ con respecto a los gráficos $f(x)$y $g(x)$?

Considerando las fórmulas de la tabla de la forma $f(\mathrm{x}) = \mathrm{k}.\mathrm{a}^{\mathrm{x}} + \mathrm{c}$, ¿en que influye el valor c?

Si una función es de la forma $f(x) = k.a^x + c$ podemos saber a simple vista que=

- ✓ Dominio $f = \mathbb{R}$
- ✓ Si es creciente o decreciente dependiendo de los valores de k y a
- ✓ Su ordenada al origen es $(0\,;k + c)$
- ✓ C indica el movimiento sobre el eje "y", la asíntota horizontal es $y = c$

Ejemplo:

Vamos a averiguar la forma de la función exponencial que pasa por los puntos A y B, siendo $A = \left(-1\,;\frac{2}{3}\right)$ y $B = (4\,;162)$. Hallar su fórmula significa encontrar su base $\boldsymbol{a}$ y su coeficiente $\boldsymbol{k}$.

- Se reemplaza en la fórmula general $y = k\,.\,a^x$

con las coordenadas de A | con las coordenadas de B

$\frac{2}{3} = k\,.\,a^{-1}$ | ……………………………..

- Se despeja k en ambas ecuaciones:

$k =$ ……………………… | $k =$ …………………………

- Se igualan las expresiones que se obtuvieron.

……………………………………………=……………………………………………

- Se despeja a y luego se reemplaza para averiguar k

…………………………………………………………………………………………

- Entonces la función que buscábamos es $y =$ ……………………

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Se denomina función logarítmica a aquella de la forma $f(x) = log_a(P(x))$ donde "a" es la ***base*** del logaritmo que define la función y $P(x)$ es una expresión que depende de x, de las cuales estudiaremos sólo expresiones lineales. Esta expresión se denomina ***argumento*** de la función.

Por ejemplo:

$f(x) = log_3(4x - 1)$ *de base* 3 ; $g(x) = log_{\frac{1}{4}}(3 - 2x)$ *de base* $\frac{1}{4}$

Como ya estudiamos, los logaritmos sólo están definidos para valores positivos y distintos de cero, y la base debe ser un número real, positivo y distinto de uno.

Entonces:

$$a > 0 \; y \; a \neq 1 \;\; entonces \; a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$$

$$P(x) > 0$$

Dominio de la función

Sabemos que el dominio de una función es el máximo conjunto de valores que puede tomar la variable "x".

Analicemos por ejemplo la función $f(x) = log_3(4x - 1)$ y supongamos que queremos graficarla. Para ello construimos una tabla de valores y obtenemos los distintos resultados:

x	$f(x)$
-3	$log_3(4.(-3) - 1) = log_3(-13) = \nexists$
-2	$log_3(4.(-2) - 1) = log_3(-9) = \nexists$
-1	$log_3(4.(-1) - 1) = log_3(-5) = \nexists$
0	$log_3(4.0 - 1) = log_3(-1) = \nexists$
1	$log_3(4.1 - 1) = log_3(3) = 1$
2	$log_3(4.2 - 1) = log_3(7) \cong 1$
3	$log_3(4.3 - 1) = log_3(11) \cong 2{,}18$

Vemos que para ciertos valores la función no está definida y para otros sí. Pero ¿Cómo podemos saber qué valores tomar sin hacer la tabla?

Para saber qué máximo conjunto de valores puede tomar x debemos determinar el ***dominio*** de la función.

La condición es que el argumento sea mayor que cero, entonces debemos plantear una incecuación y despejar x

En este caso sería: $$4x - 1 > 0$$

$$4x > 1$$

$$x > \frac{1}{4} \quad entonces \; \boldsymbol{Domf}: \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}; \infty\right)$$

Quiere decir que para cualquier valor que no esté en dicho intervalo, la función no estará definida.

¿Qué pasa para los valores menores que $\frac{1}{4}$? . No hay gráfica de la función

Las funciones logarítmicas poseen asíntotas verticales, las que estudiaremos nosotros sólo tienen una.

La asíntota vertical se encuentra en el valor que anula al argumento de la función, en este caso en $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$. En este valor siempre es donde comienza o termina el dominio.

Para poder construir un gráfico de la función en cuestión debemos buscar dos puntos clave: las intersecciones con los ejes coordenados.

- La ordenada al origen de la función, se obtiene reemplazando a x por cero, siempre que este se encuentre dentro de dominio. En este caso, si observamos la tabla, la función no existe para dicho valor, por lo tanto ***no tiene ordenada al origen***.

- La raíz, se encuentra en aquel valor que hace que la función valga cero, es decir, aquel valor que al reemplazarlo en la función de cómo resultado cero. A simple vista es imposible darse cuenta por lo que debemos plantear una ecuación

$$log_3(4x-1)=0$$

Que por definición de logaritmo es:

$$3^0 = 4x - 1$$

$$1 = 4x - 1$$

$$1 + 1 = 4x$$

$$2 = 4x$$

$$\frac{1}{2} = x$$

Luego la raíz de la función esta en el valor $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Resumiendo:

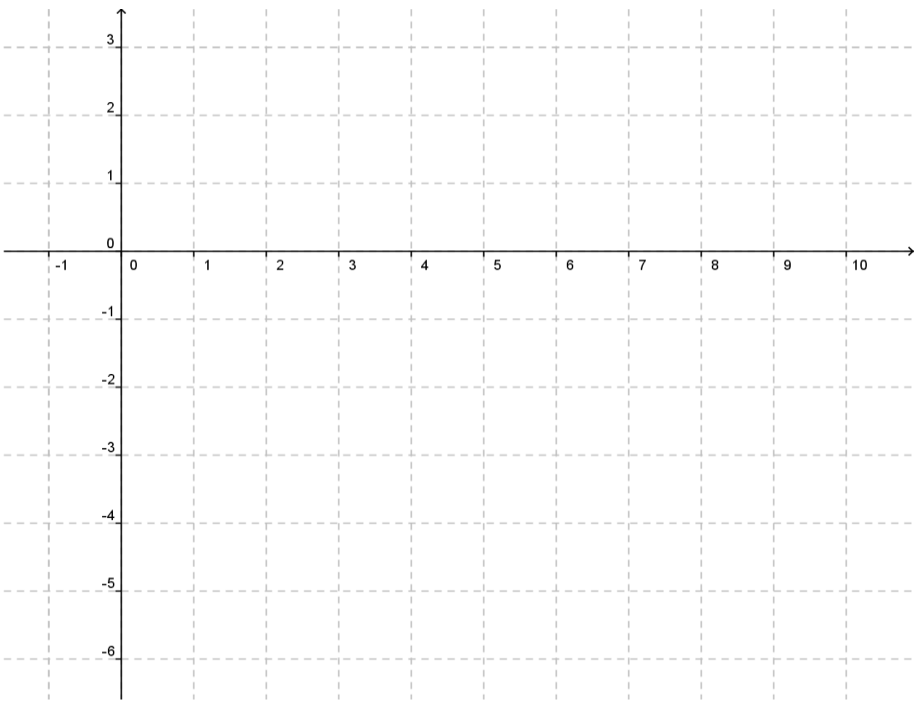
$Domf\colon \left(\frac{1}{4};\infty\right)$

Asíntota Vertical: $x = \frac{1}{4}$

Ordenada al origen: no tiene

Raíz: $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Con esta información se puede construir el gráfico de la función



Otro ejemplo: Analicemos la función $g(x) = log_{\frac{1}{4}}(3 - 2x)$

Dominio: $3 - 2x > 0$

$$-2x > -3$$

$x < -3 : (-2)$

se invierte el sentido de la desigualdad al pasar dividiendo un valor negativo: $x < \frac{3}{2}$

- *Dom g:* $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$
- *Asíntota vertical:* $x = \frac{3}{2}$
- *Ordenada al origen:*

  $g(0) = log_{\frac{1}{4}}(3 - 2.0) = log_{\frac{1}{4}}(3) \cong -0{,}79$ *(la aproximación es sólo para el gráfico)*

- Raíz:

$$log_{\frac{1}{4}}(3 - 2x) = 0$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 3 - 2x$$

$$1 = 3 - 2x$$

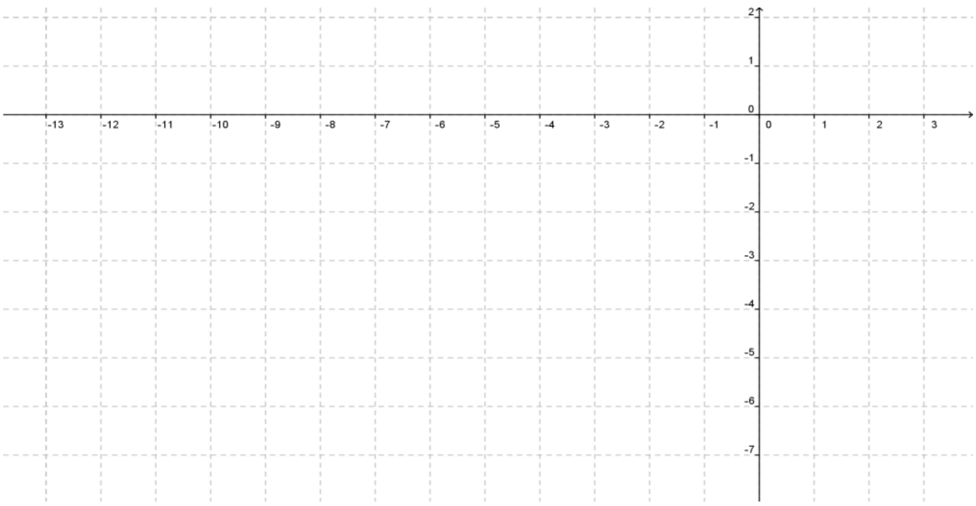
$$1 - 3 = -2x$$

$$-2 = -2x$$

$$-2 : (-2) = x$$

$$1 = x$$

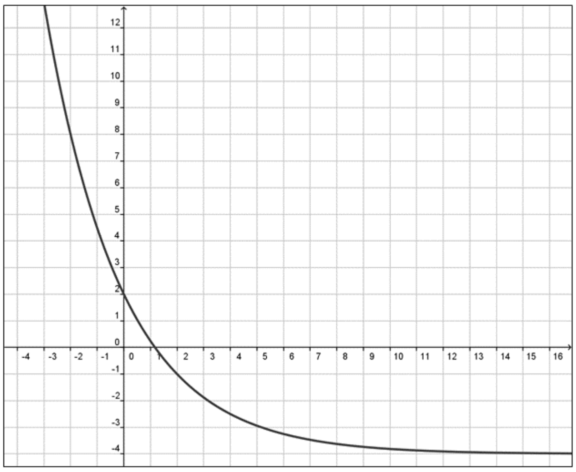
- Gráfico

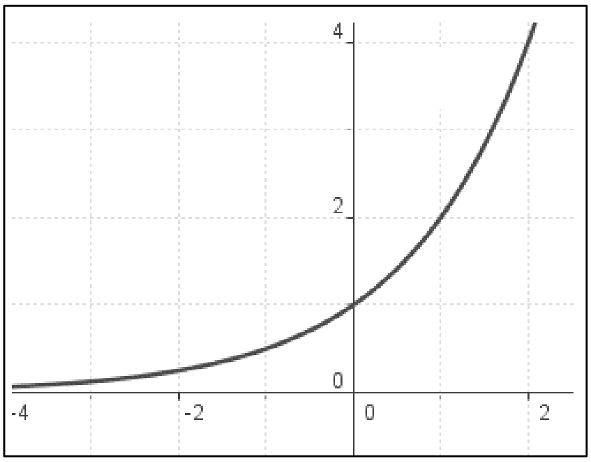


Nota: Las funciones logarítmicas son las funciones inversas de las exponenciales.

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARITMICA- PRÁCTICA

1) Dados los siguientes gráficos de funciones exponenciales, indicar dominio, imagen, conjunto de ceros, positividad y negatividad, ordenada al origen, crecimiento o decrecimiento, asíntota.





2) Representar gráficamente las siguientes funciones. Luego indicar de cada una de ellas dominio, imagen, asíntota, la intersección con los ejes y si crece o decrece la gráfica, conjunto de positividad y negatividad, máximo y mínimo.
   a) $j(x) = -2\ .\ 3^x$
   b) $k(x) = 3^x + 2$
   c) $l(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$
   d) $t(x) = -2^x - 2$
   e) $z(x) = \frac{1}{2}\ .\ 2^x - 1$

3) Hallar la expresión de la función de la forma $f(x) = k\ .\ a^x$ que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.

   a) $k = 3$ y $a = 5$
   b) $k = 3$ y pasa por el punto $(2\ ;12)$
   c) $a = \frac{1}{2}$ y $f(2) = 1$
   d) Pasa por los puntos $(1\ ;\ -1{,}5)$ y $(0\ ;\ -0{,}5)$
   g) Pasa por el punto $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ y k=2
   h) Pasa por los puntos $\left(-3;\frac{1}{625}\right)$ $y(5;625)$

4) Hallen si es posible, las raíces de las siguientes funciones exponenciales

a. $f_1(x) = 3^x$

b. $f_2(x) = 2^x - 1$

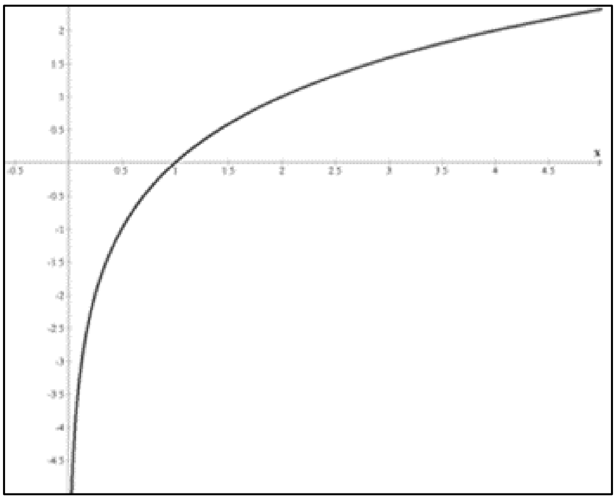
c. $f_3(x) = 4.2^x - 16$

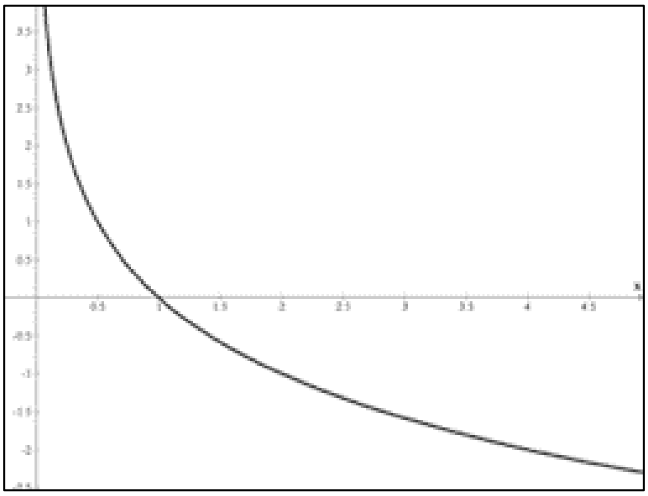
d. $f_4(x) = -3.2^x + 81$

e. $f_5(x) = 5^x - 3$

f. $f_6(x) = 2.3^x + 8$

5) Dados los siguientes gráficos de funciones logarítmicas, indicar dominio, imagen, conjunto de ceros, positividad y negatividad, ordenada al origen, crecimiento o decrecimiento, asíntota.





6) Representar gráficamente las siguientes funciones. Luego indicar de cada una de ellas dominio, imagen, asíntota, la intersección con los ejes y si crece o decrece la gráfica, conjunto de positividad y negatividad, máximo y mínimo.

a) $h(x) = \log_5(-2x + 10)$

b) $f(x) = \log(x - 2) + 1$

c) $l(x) = \log_5(2x - 3)$

d) $m(x) = \log_2 x + 1$

FUNCIÓN POLINÓMICA - RESPUESTAS

1) a) No, ya que $x = 10 \in C^+$ y $x = -5 \in C^-$

   b) C_0: $\{-1; 2; 5\}$ OAO: $(0; 10)$ C^+: $(-1; 2) \cup (5; \infty)$ C^-: $(-\infty; -1) \cup (2; 5)$

3) El grado de multiplicidad mínimo es 5.

5) a) 4

   b) $x_1 = -5$ $(doble)$ $x_2 = -1$ $(simple)$ $x_3 = 2$ $(simple)$ OAO: $(0; 50)$

   c) C^+: $(-\infty; -5) \cup (-5; -1) \cup (2; \infty)$ C^-: $(-1; 2)$

6) Gráfico 1 : d) Gráfico 2 : b) Gráfico 3 : a)

7) a = $\frac{1}{6}$ $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - 1$

8) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{9}{5}x$ $f(x) = \frac{1}{5}x(x+3)(x-3)$

9) a) A(x): 4 B(x): 3

   b) A(x): $x_1 = -3$ $(doble)$ $x_2 = 2$ $(simple)$ $x_3 = 5$ $(simple)$
   B(x): $x_1 = -2$ $(doble)$ $x_2 = 5$ $(simple)$

   c) A(x): C^+: $(-\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (5: \infty)$ C^-: $(2; 5)$
   B(x): C^+: $(-\infty; -2) \cup (-2; 5)$ C^-: $(5; -\infty)$

10) $f(x) = -0{,}2\,(x+5)(x+3)^2\,(x-1)^2$

11) a) $f(x) = \frac{1}{8}\,(x-3)^2\,(x+2)^2$

   b) $f(x) = \frac{4}{5}\,(x+5)(x+1)^2$

   c) $f(x) = \frac{2}{3}\,(x+\frac{1}{3})^2\,(x-3)(x-2)$

12) $f(x) = 3\,(x-4)(x+2)\left(x - \frac{11}{3}\right)$

13) $g(x) = -6\,\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-4)$

14) $h(x) = \frac{1}{48}\,(x+2)^2\,(x-2)^2\,(x-3)$

15) a) $x_1 = -2$ $(simple)$ $x_2 = -1$ $(simple)$ $x_3 = 1$ $(simple)$ *OAO: (0; -2)*
   C^+: $(-2; -1) \cup (1; \infty)$ C^-: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1)$

b) $x_1 = -1\ (doble)$ $\quad x_2 = 0\ (simple)$ $\quad x_3 = 2\ (simple)$ $\quad$ *OAO: (0; 0)*

$C^+: (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; \infty)$ $\qquad C^-: (0; 2)$

c) C_0: $x_1 = \sqrt{3}\ (doble)$ $\quad x_2 = 0\ (doble)$ $\quad x_3 = -\sqrt{3}\ (simple)$ $\quad$ *OAO: (0; 0)*

$C^+: \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \infty\right)$ $\qquad C^-: \left(-\sqrt{3}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{3}\right)$

d) C_0: $x_1 = -1(triple);\ x_2 = 1(doble);\ x_3 = -3\ (simple)$ $\quad$ *OAO: (0; 3)*

$C^+: (-1; 1) \cup (1; \infty)$ $\qquad C^-: (-\infty; -1)$

FUNCIÓN HOMOGRÁFICA - RESPUESTAS

1) a)

DOMINIO	$R - \{2\}$
IMAGEN	$R - \{0\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$
C0	$\emptyset$
AV	$x = 2$
AH	$y = 0$

b)

DOMINIO	$R - \{4\}$
IMAGEN	$R - \{-2\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$(0;\ 0)$
C0	$\{0\}$
AV	$x = 4$
AH	$y = -2$

c)

DOMINIO	$R - \{-2\}$
IMAGEN	$R - \{1\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$\left(0; -\frac{3}{2}\right)$
C0	$\{3\}$
AV	$x = -2$
AH	$y = 1$

d)

DOMINIO	$R-\{5\}$
IMAGEN	$R-\{-3\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$\left(0;\ -\frac{6}{5}\right)$
C^0	$\{2\}$
AV	$x=5$
AH	$y=-3$

e)

DOMINIO	$R-\{1\}$
IMAGEN	$R-\left\{\frac{3}{2}\right\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$(0;\ 5)$
C^0	$\left\{\frac{10}{3}\right\}$
AV	$x=1$
AH	$y=\frac{3}{2}$

f)

DOMINIO	$R-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
IMAGEN	$R-\{1\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$(0;\ -1)$
C^0	$\left\{\frac{1}{2}\right\}$
AV	$x=-\frac{1}{2}$
AH	$y=1$

g)

DOMINIO	$R-\{0\}$
IMAGEN	$R-\{2\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$\nexists$
C^0	$\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
AV	$x=0$
AH	$y=2$

h)

DOMINIO	$R-\{2\}$
IMAGEN	$R-\{-3\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$
C^0	$\left\{\frac{1}{3}\right\}$
AV	$x=2$
AH	$y=-3$

2) a)

DOMINIO	R - $\{-3\}$
IMAGEN	R - $\left\{\frac{-1}{2}\right\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$(0 ; \frac{1}{2})$
C0	(3 ; 0)
C+	(-3 ; 3)
C-	$(-\infty ;\ -3)\ \cup (3 ;\ \infty)$
CRECE O DECRECE	Decrece
AV	X = -3
AH	Y = $\frac{-1}{2}$

b)

DOMINIO	R - {1}
IMAGEN	R - {0}
ORDENADA AL ORIGEN	$(0 ; -2)$
C0	$\emptyset$
C+	$(1 ; \infty)$
C-	$(-\infty ;\ 1)$
CRECE O DECRECE	Decrece
AV	X = 1
AH	Y = 0

c)

DOMINIO	R - {0}
IMAGEN	R - {0}
ORDENADA AL ORIGEN	$\nexists$
C0	$\emptyset$
C+	$(-\infty ; 0)$
C-	$(0 ;\ \infty)$
CRECE O DECRECE	Crece
AV	X = 0
AH	Y = 0

d)

DOMINIO	R - {0}
IMAGEN	R - {0}
ORDENADA AL ORIGEN	∄
C0	∅
C+	(-∞ ; 0)
C-	(0 ; ∞)
CRECE O DECRECE	Crece
AV	X = 0
AH	Y = 0

3) a) Dom f = R – {2} Im f = R - {1}

b) C^0: {−1}(-1 ; 0) OAO: (0 ; $\frac{-1}{2}$)

c) A.V.: x = 2 A.H.: y = 1

e) Decrecimiento: R - {2} Crecimiento: ∅

4) a) $f(x) = \frac{1}{x-4}$ b) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ c) $f(x) = \frac{x+5}{x+\frac{5}{6}}$ d) $f(x) = \frac{x+\frac{1}{5}}{x+7}$

e) $f(x) = \frac{-x}{\frac{1}{3}x+2}$ f) $f(x) = \frac{-5x}{x-2}$ g) $f(x) = \frac{3x}{x+3}$ h) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

i) $f(x) = \frac{3x+1}{x}$ j) $f(x) = \frac{2}{x-4}$

5) a) Dom f = R - {4} Im f = R - {−2}
C_0: {0} OAO: (0;0)
C^+: (0; 4) C^-: $(-\infty; 0) \cup (4; \infty)$
Crecimiento: R - {4} Decrecimiento: ∅
A.V.: x = 4 A.H.: y = -2

b) Dom f = R - {0} Im f = R - {2}
C_0: $(\frac{-1}{2}; 0)$ OAO: ∄
C^+: $\left(-\infty; \frac{-1}{2}\right) \cup (0; \infty)$ C^-: $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$
Crecimiento: R - {0} Decrecimiento: ∅
A.V.: x = 0 A.H.: y = 2

c) Dom f = R - {2} Im f = R - {3}
C_0: (1; 0) OAO: $(0;\frac{3}{2})$
C^+: $(-\infty; 1) \cup (2; \infty)$ C^-: (1; 2)
Crecimiento: ∅ Decrecimiento: R - {2}
A.V.: x = 2 A.H.: y = 3

NÚM. REALES. LOGARITMOS - RESPUESTAS

1)

a) 1	f) -1	k) 6	p) 4
b) -1	g) -3	l) -1	q) --
c) 0	h) 1	m) 2	r) ½
d) 2	i) 3	n) -3	s) 4
e) -1	j) -2	o) -3/2	t) 1/3

2) a) $3\ \log 2 + 2\log 8$

b) $\frac{1}{2}\ \log 3 - 4\log 5$

c) $\frac{3}{5}\log 3 + \frac{3}{10}\log 2$

d) $\frac{6}{5}\ \log 2 - \frac{2}{5}\log 5 + \frac{1}{5}\log 3$

e) $\log_{\frac{1}{2}} 8 + 2\log_{\frac{1}{2}} 1 - 2\log_{\frac{1}{2}} 2$

f) $\frac{3}{5}\ \log_2 a + \frac{2}{5}\log_2 b + \frac{4}{5}\log_2 c - \frac{1}{5}\log_2 d - \frac{2}{5}\log_2 e$

3) a) 3 b) 1 c) -8 d) -9/2

4) a) 5/2 b) 10

5) a) 8 b) 12 c) -5/2

6)

a) x=-2	d) x=3	g) $x_1=2$ $x_2=-2$	j) $x_1=3$ $x_2=-3$	m) $x_1=4$ $x_2=-1$	p) x=2
b) x=-1	e) x= 2	h) x=-5	k) x=-4	n) $x_1=1/2$ $x_2=0$	q) sin soluc
c) x= 1	f) x=1/2	i) x=0	l) $x_1=3$ $x_2=2$	o) x=3	r) $x_1=0$ $x_2=1$

a) $S = \{6\}$	g) $S = \{2\}$	m) $S = \left\{10; \frac{1}{100}\right\}$
b) $S = \left\{\frac{3}{2}; 3\right\}$	h) $S = \{1;\ -1\}$	n) $S = \{5\}$
c) $S = \{6\}$	i) $S = \{9\}$	o) $S = \left\{\frac{32}{15}\right\}$
d) $S = \{37\}$	j) $S = \{2\}$	p) $S = \emptyset$
e) $S = \{2\}$	k) $S = \left\{625; \frac{1}{25}\right\}$	q) $S = \{4\}$

7) f) $S = \{4\}$ l) $S = \{216\}$ r) $S = \{0\}$

FUNCIÓN EXP. Y LOGARÍTMICA - RESPUESTAS

1) a)

DOMINIO	R
IMAGEN	$(-4;\ \infty)$
C^0	$\{1\}$
C+	$(-\infty; 1)$
C-	$(1;\ \infty)$
ORDENADA AL ORIGEN	$(0;\ 2)$
CRECIMIENTO	$\emptyset$
DECRECIMEINTO	R
AH	$y = -4$

d)

DOMINIO	R
IMAGEN	$(0;\ \infty)$
C^0	$\emptyset$
C+	R
C-	$\emptyset$
ORDENADA AL ORIGEN	$(0;\ 1)$
CRECIMIENTO	R
DECRECIMEINTO	$\emptyset$
AH	$y = 0$

2) a)

DOMINIO	R
IMAGEN	$(-\infty; 0)$
AH	$y = 0$
C^0	$\emptyset$
ORDENADA AL ORIGEN	$(0;\ -2)$
CRECIMIENTO	$\emptyset$
DECRECIMEINTO	R
C+	$\emptyset$
C-	R
MÁXIMO	$\nexists$
MÍNIMO	$\nexists$

b)

DOMINIO	R
IMAGEN	$(2; \infty)$
AH	$y = 2$
C^0	$\emptyset$
ORDENADA AL ORIGEN	$(0;\ 3)$
CRECIMIENTO	R
DECRECIMEINTO	$\emptyset$
C+	R
C-	$\emptyset$
MÁXIMO	$\nexists$
MÍNIMO	$\nexists$

c)

DOMINIO	R
IMAGEN	$(0;\ \infty)$
AH	$y = 0$
C^0	$\emptyset$
ORDENADA AL ORIGEN	$(0;\ 16)$
CRECIMIENTO	$\emptyset$
DECRECIMEINTO	R
C+	R
C-	$\emptyset$
MÁXIMO	$\nexists$
MÍNIMO	$\nexists$

d)

DOMINIO	R
IMAGEN	$(-\infty; -2)$
AH	$y = -2$
C^0	$\emptyset$
ORDENADA AL ORIGEN	$(0;\ -3)$
CRECIMIENTO	$\emptyset$
DECRECIMEINTO	R
C+	$\emptyset$
C-	R
MÁXIMO	$\nexists$
MÍNIMO	$\nexists$

e)

DOMINIO	R
IMAGEN	$(-1;\ \infty)$
AH	$y = -1$
C^0	$\{1\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$
CRECIMIENTO	R
DECRECIMEINTO	$\emptyset$
C+	$(1;\ \infty)$
C-	$(-\infty; 1)$
MÁXIMO	$\nexists$
MÍNIMO	$\nexists$

3) a) $f(x) = 3\,.\,5^x$

b) $f(x) = 3\,.\,2^x$

e) $f(x) = 4\,.\left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}\,.\,3^x$

e) $f(x) = 2\,.\left(\frac{4}{3}\right)^x$

f) $f(x) = \frac{1}{5}\,.\,5^x$

4) a) $C^0 = \emptyset$

b) $C^0 = \{0\}$

c) $C^0 = \{2\}$

d) ¿?

e) ¿?

f) $C^0 = \emptyset$

5) a)

DOMINIO	$(0;\ \infty)$
IMAGEN	R
AV	$x = 0$
C^0	$\{1\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$\nexists$
CRECIMIENTO	$(0;\ \infty)$
DECRECIMEINTO	$\emptyset$
C+	$(1;\ \infty)$
C-	$(0; 1)$
MÁXIMO	$\nexists$
MÍNIMO	$\nexists$

b)

DOMINIO	$(0;\ \infty)$
IMAGEN	R
AV	$x = 0$
C^0	$\{1\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$\nexists$
CRECIMIENTO	$\emptyset$
DECRECIMEINTO	$(0;\ \infty)$
C+	$(0;\ 1)$
C-	$(1; \infty)$
MÁXIMO	$\nexists$
MÍNIMO	$\nexists$

6) a)

DOMINIO	$(-\infty; 5)$
IMAGEN	R
AV	$x = 5$
C^0	$\left\{\frac{9}{2}\right\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$(0;\ \log_5 10)$
CRECIMIENTO	$\emptyset$
DECRECIMEINTO	$(-\infty; 5)$
C+	$\left(-\infty; \frac{9}{2}\right)$
C-	$\left(\frac{9}{2}; 5\right)$
MÁXIMO	$\nexists$
MÍNIMO	$\nexists$

b)

DOMINIO	$(2;\infty)$
IMAGEN	R
AV	$x=2$
C0	$\left\{\frac{21}{10}\right\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$\nexists$
CRECIMIENTO	$(2;\infty)$
DECRECIMEINTO	$\emptyset$
C+	$(2{,}1;\ \infty)$
C-	$(2;2{,}1)$
MÁXIMO	$\nexists$
MÍNIMO	$\nexists$

c)

DOMINIO	$(1{,}5;\ \infty)$
IMAGEN	R
AV	$x=\frac{3}{2}$
C0	$\{2\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$\nexists$
CRECIMIENTO	$(1{,}5;\ \infty)$
DECRECIMEINTO	$\emptyset$
C+	$(2;\infty)$
C-	$(1{,}5;2)$
MÁXIMO	$\nexists$
MÍNIMO	$\nexists$

d)

DOMINIO	$(0;\infty)$
IMAGEN	R
AV	$x=0$
C0	$\left\{\frac{1}{2}\right\}$
ORDENADA AL ORIGEN	$\nexists$
CRECIMIENTO	$(0;\infty)$
DECRECIMEINTO	$\emptyset$
C+	$\left(\frac{1}{2};\ \infty\right)$
C-	$\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$
MÁXIMO	$\nexists$
MÍNIMO	$\nexists$